MEBS

Lecture 3

Modelli finanziari per i tassi di interesse

MEBS, lezioni

Roberto Renò
Università di Siena

3.1

Modelli per la struttura

La ricerca di un modello finanziario che descriva l'evoluzione della struttura per scadenza $v(t,s)$ in funzione di t ed s è un problema cruciale nella moderna teoria finanziaria.

Un modello realistico deve essere il più semplice possibile per permettere di trattarlo analiticamente, ma anche capace di catturare il maggior numero di caratteristiche empiriche osservate storicamente sui mercati finanziari.

Per i tassi di interesse, la struttura a due variabili temporali (il tempo e la maturità) rende il problema ancora più contorto.

Il principio guida in quest'ambito è il principio di assenza di arbitraggi. 3.2

Aleatorietà dei cambiamenti

Una caratteristica fondamentale dei mercati è l'aleatorietà: pur se il movimento dei prezzi o dei tassi è dettato da leggi economiche deterministiche, l'enorme complessità della struttura formativa dei prezzi fa in modo che essi appaiano come il frutto di un cammino casuale *(random walk)*, come notato per la prima volta da Bachelier agli inizi del '900.

Un modello affidabile deve pertanto in primo luogo tener conto di questa aleatorietà.

Occorrono nuovi strumenti matematici, in particolare il moto Browniano. 3.3

Moto Browniano

Il moto Browniano è un processo aleatorio $W(t)$ tale che:

- $W(0) = 0$
- $W(t) - W(s)$ è indipendente da $W(s) - W(u)$, $\forall\, u < s < t$
- $W(t) - W(s) \simeq \mathcal{N}(0, t-s)$
- le traiettorie sono continue

Il moto Browniano (detto anche processo di Wiener) è un'ingrediente di un nuovo calcolo differenziale: si parla pertanto di equazioni differenziali stocastiche in contrapposizione alle equazioni differenziali ordinarie.

Abbiamo quindi uno strumento matematico che tiene conto dell'aleatorietà. 3.4

Tasso spot

Per i tassi di interesse, un ruolo fondamentale è rivestito dalla curva dei rendimenti *(yield curve)*, definita anche come intensità istantanea di interesse.

In ambito deterministico, il prezzo di un TCN è dato da:

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$$

Un importanza fondamentale è rivestita dal cosiddetto tasso a breve *(short rate, spot rate)*:

$$r(t) = \lim_{s \to t} f(t,s)$$

Notiamo come il tasso a breve non sia osservabile sul mercato, e occorrano delle *proxy* per poterlo stimare (per esempio, il tasso di un BOT a tre mesi). 3.5

Tasso spot e prezzi dei TCN

Il tasso a breve è sufficiente per la valutazione di un TCN. Il prezzo di un TCN, infatti, è dato da:

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r(s)ds}$$

Tale formula deterministica non ha applicazioni pratiche se siamo interessati a valutare un TCN emesso in t; il problema sta nel fatto che in t

non conosciamo quale sarà la realizzazione di r fino a T, il tasso a breve è una variabile stocastica.

Occorrono ipotesi aggiuntive:

- L'ipotesi di assenza di arbitraggio
- La completezza del mercato

Di queste due ipotesi cruciali, la prima è in genere sempre riconosciuta valida, la seconda può essere ignorata. 3.6

Probabilità neutrale al rischio

Se valgono queste due ipotesi, allora la relazione deterministica sul prezzo di un TCN può essere riscritta in termini di valor medio condizionale sotto una probabilità $\mathcal{Q}$ diversa da quella osservata storicamente:

$$P(t,T) = E_t^{\mathcal{Q}}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right]$$

Questa formula rappresenta una possibile generalizzazione della formula analoga nel caso deterministico, e mette in risalto come, dalla modellizzazione del tasso a breve (ed eventualmente della probabilità $\mathcal{Q}$) si possa risalire ai prezzi dei titoli.

Questa metodologia si estende anche a titoli più complessi dei TCN, come i titoli derivati (gli IRS, ad esempio). 3.7

Probabilità della natura

I modelli più recenti cercano quindi di modellizzare il tasso a breve.

La probabilità $\mathcal{Q}$ si chiama probabilità neutrale al rischio *(risk neutral)*, la sua esistenza è assicurata dal principio di assenza di arbitraggi, e sotto tale probabilità il rendimento istantaneo atteso di tutti i titoli è pari al rendimento istantaneo del titolo privo di rischio, che è proprio $r(t)$. Essa ha il ruolo rivestito dalle preferenze dell'agente rappresentativo nelle teorie di equilibrio economico generale.

Nella probabilità vera, invece i titoli rischiosi hanno un rendimento atteso istantaneo superiore a $r(t)$, com'è ovvio attendersi; tale differenza prende proprio il nome di premio per il rischio. 3.8

Processi stocastici

La modellizzazione di $r(t)$ avviene tramite processi stocastici.

Esempio antesignano: il modello di Merton (1970):

$$\frac{dr(t)}{r(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

Questo modello imita il famoso modello di Black e Scholes per il prezzo delle azioni.

Abbiamo un drift μ e una volatilità σ. Il premio per il rischio è in genere proporzionale alla volatilità.

Questo tipo di processo porta ad una densità di transizione log-normale. 3.9

Il modello di Vasicek

Un esempio più significativo è rappresentato dal modello di Vasicek (1977):

$$dr(t) = \alpha(\gamma - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

con $\alpha, \gamma, \sigma > 0$.

Il modello di Vasicek introduce il concetto di *mean reversion*:

- se $r(t) > \gamma$ il termine diffusivo è negativo, proporzionalmente alla differenza: $r(t)$ tende a scendere
- se $r(t) < \gamma$ il termine diffusivo è positivo, e $r(t)$ tende a risalire

Per questo motivo γ si chiama media di lungo periodo; α fissa la velocità di mean reversion, mentre σ è la volatilità del tasso. 3.10

Il modello di Vasicek

Il modello di Vasicek fornisce una descrizione piuttosto realistica dei processi osservati sulla serie storica del tasso a breve: la *mean reversion* e l'aleatorietà delle variazioni.

Esso ha pertanto rappresentato un punto di svolta in questo ambito, e viene ancora largamente utilizzato nella pratica.

Com'è ovvio esso presenta però dei difetti. Ad esempio, per alcune traiettorie i tassi a breve possono diventare negativi, ipotesi piuttosto irrealistica, e sicuramente sbagliata nel caso di tassi nominali.

Inoltre la volatilità è costante, indipendentemente dai livelli del tasso. 3.11

Il modello di Cox, Ingersoll e Ross

Una soluzione a questi due problemi è fornita dal modello proposto da Cox, Ingersoll e Ross (1985):

$$dr(t) = \alpha(\gamma - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Stavolta la volatilità e più alta per livelli dei tassi più elevati (*level effect*).

Inoltre si dimostra agevolmente che, per tutte le traiettorie, $r(t) \geq 0$.

Questo risultato si intuisce dal fatto che, quando r è prossimo a zero, il termine diffusivo è molto più piccolo di quello di drift: quest'ultimo pertanto prevale facendo pertanto risalire il tasso a breve. 3.12

Il modello di Cox, Ingersoll e Ross

La media e la varianza di $r(t)$ nel modello CIR valgono:

$$E_t\left[r(s)\right] = \gamma - (\gamma - r(t))e^{-\alpha(s-t)}$$

$$V_t\left[r(s)\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(s-t)}\right)\left[2r(t)e^{-\alpha(s-t)} + \gamma\left(1 - e^{-\alpha(s-t)}\right)\right]$$

Pertanto:

$$\lim_{s\to\infty} E_t\left[r(s)\right] = \gamma$$

il che giustifica il nome di media di lungo periodo.

Inoltre nel modello CIR la densità di transizione è nota in forma chiusa. 3.13

Prezzi dei TCN

Il modello CIR presenta formule chiuse per i prezzi dei TCN. Dopo aver introdotto il premio per il rischio pari a:

$$\lambda = \frac{\pi\sqrt{r}}{\sigma}$$

si ottiene facilmente:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)}$$

dove $A(t,T), B(t,T)$ sono funzioni di $T-t, \alpha, \gamma, \sigma, \pi$.

Da $P(t,T)$ è possibile ricavare la struttura in termini di intensità di interesse o dei rendimenti. 3.14

Modello CIR: pro e contro

Pregi del modello CIR:

- È semplice, essenziale ma ricco di significatività economica.
- È possibile stimarlo facilmente sia su serie storica che dalla curva dei rendimenti (analisi *cross-section*).

Difetti del modello CIR:

- Recenti studi dimostrano la sua insufficienza a descrivere i dati in serie storica.
- La struttura permessa per la curva dei rendimenti è poco flessibile e non permette di spiegare alcune curve osservate.
- L'ipotesi dell'esistenza di una media di lungo periodo appare di difficile giustificazione economica
- La struttura della volatilità è anch'essa insufficiente a spiegare la volatilità osservata storicamente 3.15

Un'estensione

Un esempio di estensione, il modello BDFS:

$$\begin{aligned} dr_t &= \alpha(\gamma_t - r_t)dt + \sqrt{\sigma_t}dW_{1t} + \rho_{\sigma r}\lambda\sqrt{\sigma_t}dW_{2t} \\ d\sigma_t &= k(\omega - \sigma_t)dt + \lambda\sqrt{\sigma_t}dW_{2t} \\ d\gamma_t &= \theta(\nu - \gamma_t)dt + \eta dW_{3t} \end{aligned} \tag{1}$$

Altre estensioni includono salti, o diverse specificazioni della volatilità stocastica.

Ogni estensione permette una descrizione più accurata dei dati al costo di richiedere procedure di stima e valutazione dei titoli molto più complicate.

Compito della ricerca operativa è di trovare un compromesso fra queste due esigenze. 3.16

Simulazione di un modello stocastico

Supponendo di voler ottenere una simulazione di un modello stocastico, ad esempio il modello CIR:

$$dr(t) = \alpha(\gamma - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

si può ricorrere alla sua discretizzazione al prim'ordine di Eulero:

$$r_{t+\Delta} - r_t = \alpha(\gamma - r_t)\Delta + \sigma\sqrt{r_t\Delta}\varepsilon_t$$

dove ε_t è una variabile aleatoria normale di media zero e varianza 1. 3.17

Simulazione di un modello stocastico

Il passo di discretizzazione Δ gioca un ruolo fondamentale: l'approssimazione è tanto più precisa quanto Δ è piccolo, ma la simulazione è più veloce se Δ è grande.

In generale, metodologie che richiedono l'utilizzo di estrazioni di numeri casuali vengono dette metodi Monte Carlo.

La discretizzazione suggerisce anche una metodologia di stima naif dei modelli stocastici. 3.18

Metodo di stima

Assumiamo di avere ad esempio i dati del tasso a breve in serie storica con cadenza, ad esempio, mensile. Ponendo in regressione r_t su r_{t-1} si ottiene:

$$r_t = ar_{t-1} + b + \varepsilon_t$$

È chiaro come dalle stime di a, b e dalla varianza dei residui si possa risalire alle stime dei parametri del modello.

Per il modello CIR questa metodologia non è applicabile direttamente, perchè la varianza dei residui dipende anch'essa da r_t. 3.19

Stima del modello CIR

Tale difficoltà si può aggirare utilizzando il cambio di variabile $y = \sqrt{r}$. Risulta infatti:

$$dy = \frac{1}{2}\left[\left(\alpha\gamma - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{1}{y} - \alpha y\right]dt + \frac{\sigma}{2}dW(t)$$

Nel termine diffusivo y non compare più, mentre nel termine di drift posso sviluppare in serie di Taylor la funzione $1/y$ intorno al suo valor medio, fermandomi al termine lineare.

La regressione da effettuare è quindi:

$$\sqrt{r_t} = a\sqrt{r_{t-1}} + b + \varepsilon_t$$

Dalla stima di a, b e dalla varianza dei residui si ricavano direttamente i parametri α, γ, σ. 3.20

Stima *cross-section*

La stima del parametro π che regola il premio per il rischio può essere effettuata nel seguente modo: supponiamo di osservare la struttura per scadenza $h(t,s)$.

Utilizzando la stima dei parametri α, γ, σ ottenuta in precedenza, si ottiene che la struttura per scadenza implicita nel modello CIR dipende solo da π, $H(t,s,\pi)$.

π si può allora stimare trovando quel valore che rende minima la differenza fra la struttura osservata e quella teorica, nella metrica dei minimi quadrati:

$$\pi = argmin \sum_{i=1}^{N} \left[h(t,s_i) - H(t,s_i,\pi)\right]^2$$

dove N è il numero delle scadenze osservate, $s_1, \ldots, s_N$. Un problema di questo tipo prende il nome di ottimizzazione non lineare, e in genere si affronta con del software dedicato. 3.21

Valutazione dei derivati

I modelli diffusivi vengono ampiamenti utilizzati per la valutazione di titoli derivati (opzioni, cap, floor, swap, swaptions).

Supponiamo di voler valutare un opzione call sul tasso a breve:

$$C(t,T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} (r(T) - K)^+ \right]$$

Per questo tipo di problema è possibile scrivere un'equazione di valutazione alle derivate parziali.

Risolvendo tale equazione, il problema può, in linea di principio, essere risolto esattamente. 3.22

Metodo Monte Carlo

Per problemi non risolvibili analiticamente, si può tentare la soluzione numerica dell'equazione differenziali alle derivate parziali.

Tale tecnica numerica è però molto difficoltosa.

Un'altra metodologia, più diffusa, consiste nei metodi Monte Carlo: utilizzando la discretizzazione, si simulano n traiettorie del tasso a breve. Nel caso dell'opzione call, si avrà:

$$C(t,T) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-\sum_{j=1}^{M} r_j^i \Delta} \left(r_M^i - K\right)^+$$

dove $r_1^i, \ldots r_M^i$ sono i valori ottenuti nell'$i-$esima simulazione, e $\Delta = \frac{T-t}{M-1}$.

La precisione della stima cresce lentamente con M, pertanto questa metodologia è lenta. 3.23